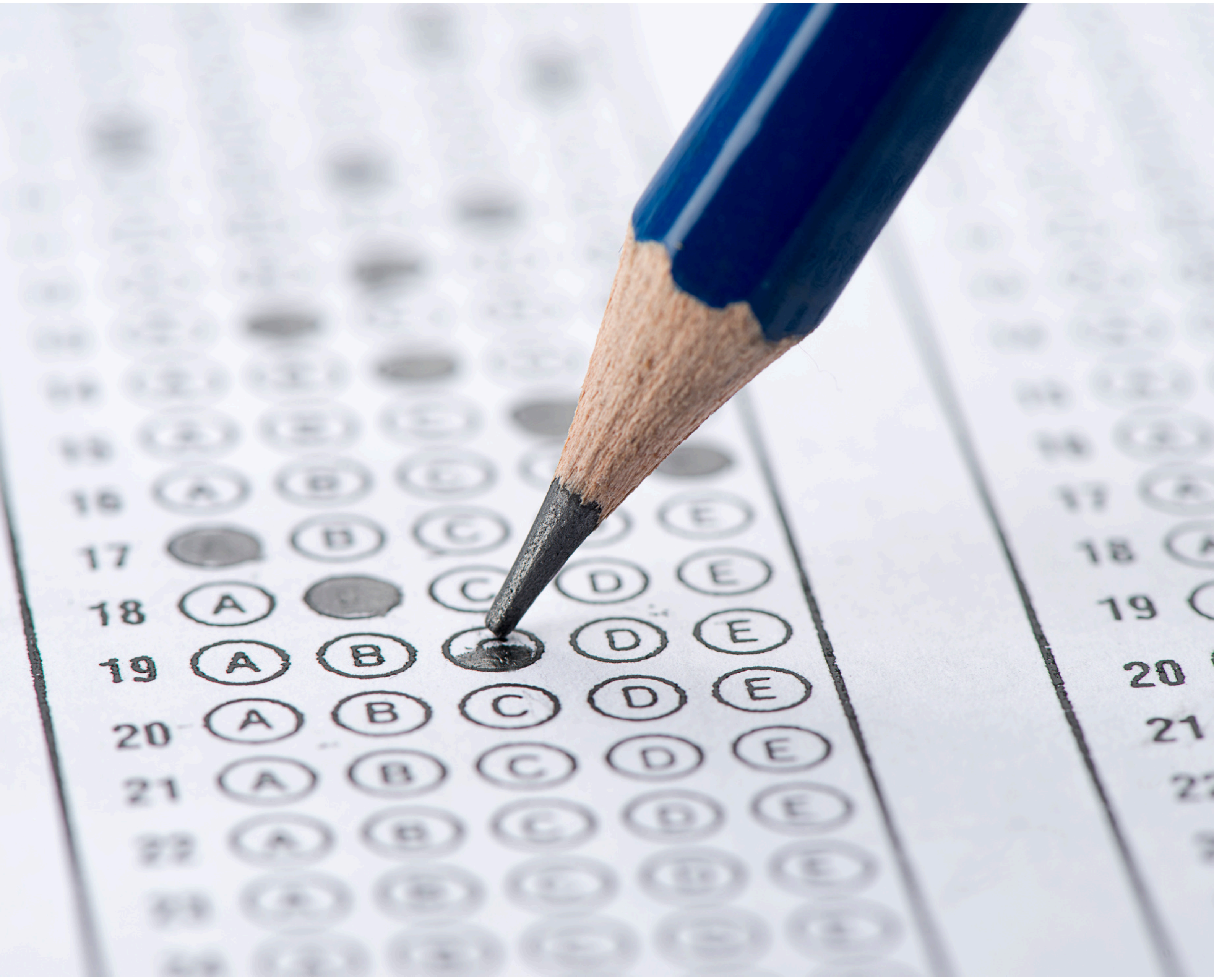


Niezbędnik ósmoklasisty

matematyka

Klaudia Kopka

Działania na liczbach

Kolejność wykonywania działań

(nawiasy)

pierwiastki
potęgi

mnożenie × ÷ dzielenie

dodawanie + − odejmowanie

Co się składa na liczby rzeczywiste?

Liczby rzeczywiste

Liczby wymierne, $\mathbb{Q}$
Liczby, które możemy przedstawić jako prosty ułamek $\frac{a}{b}$, przy czym a oraz b muszą być liczbami całkowitymi, a b nie może być równe 0.

Liczby naturalne, $\mathbb{N}$
Za ich pomocą liczymy
Należą one do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Liczby całkowite, $\mathbb{Z}$
Liczby naturalne oraz zero i liczby ujemne
Krótko mówiąc, liczby bez części ułamkowej

Liczby niewymierne
Liczby, których nie da się przedstawić w postaci prostego ułamka, np. $\sqrt{3}$

Podzielność liczb

Liczba podzielna przez	Kiedy	Przykład
2	Liczba jest **parzysta**, tzn. kończy się na 0, 2, 4, 6 lub 8	$728:2=364$ $708\,122:2=354\,061$
3	**Suma jej cyfr jest podzielna przez 3**. Możemy tak "upraszczać" póki nie otrzymamy najmniejszej możliwej liczby.	$104\,628$ $1+0+6+2+8=21$ $21:3=7$
4	Liczba tworzona przez 2 **ostatnie cyfry** jest **podzielna przez 4**.	$52\,136$ $36:4=9$
5	Liczba kończy się na 0 lub 5	$120\,050:5=24\,010$ $36\,055:5=7211$
6	Liczba jest podzielna **jednocześnie przez 2 i przez 3**	$4332:2=2166$ $4+3+3+2=12$ $12:3=4$
9	Suma jej cyfr jest podzielna przez 9.	1935 $1+9+3+5=18$ $18:9=2$

Kwadraty i sześciany liczb

Przydatne kwadraty

$2^2=4$	$11^2=121$	$20^2=400$
$3^2=9$	$12^2=144$	$21^2=441$
$4^2=16$	$13^2=169$	$22^2=484$
$5^2=25$	$14^2=196$	$23^2=529$
$6^2=36$	$15^2=225$	$24^2=576$
$7^2=49$	$16^2=256$	$25^2=625$
$8^2=64$	$17^2=289$	$27^2=729$
$9^2=81$	$18^2=324$	$28^2=784$
$10^2=100$	$19^2=361$	$29^2=841$
		$30^2=900$

Przydatne sześciany

$2^3=8$

$3^3=27$

$4^3=64$

$5^3=125$

$6^3=216$

$7^3=343$

$8^3=512$

$9^3=729$

$10^3=1000$

Rozkład liczb na czynniki pierwsze

Rozkład $\sqrt{48}$ na czynniki pierwsze.

Zapisujemy liczbę “na kresce” i dzielimy przez liczby pierwsze - **2, 3, 5 i 7**

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Wybieramy możliwie najmniejszą liczbę jako dzielnik

Wynik dzielenia zapisujemy po lewej stronie

Dzielimy aż dojdziemy do 1

3 zostaje pod pierwiastkiem

Możemy w takim razie zapisać, że:

$$\sqrt{48} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{\underbrace{4 \cdot 4} \cdot 3}$$

Z każdej 4 otrzymujemy 2

2 wyskakują przed znak pierwiastka

$$2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Rozkład $\sqrt[3]{81}$ na czynniki pierwsze:

$$\begin{array}{r|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Dzielimy przez najmniejszą liczbę pierwszą przez jaką możemy - w tym wypadku 3

Można zapisać, że:

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$$

Żeby wyciągnąć coś przed znak pierwiastka potrzebujemy 3 razy tej samej liczby przemnożonej przez siebie - pierwiastek jest stopnia 3

Działania na liczbach

Potęgi i pierwiastki

Potęgi	Pierwiastki
$a^0 = 1$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
$a^1 = a$	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$
$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	
$a^x : a^y = a^{x-y}$	
$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	
$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	

Uwaga na częsty błąd:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$$

Pierwiastków się tak nie sumuje

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} \neq \sqrt{4}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Ale można je sumować w taki sposób

Pierwiastki to zwykłe liczby, ale niektóre są **niewymierne**, więc **nie da się ich zapisać jako ułamka**, a tym bardziej jako liczby z rozwinięciem dziesiętnym. Dlatego zapisujemy je w takiej postaci. Można je do siebie dodawać, **o ile jest suma takich samych pierwiastków.**

To jest najprostszy możliwy zapis takiego wyrażenia

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$$

Zamiana jednostek

Zamiana jednostek długości

Zera w prawo

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] 1\ \text{mm} \arrow[r, bend right, "1"'] & 1\ \text{cm} \arrow[l, bend right, "1"'] \arrow[r, bend right, "1"'] & 1\ \text{dm} \arrow[l, bend right, "1"'] \arrow[r, bend right, "1"'] & 1\ \text{m} \arrow[l, bend right, "1"'] \arrow[r, bend right, "3"'] & 1\ \text{km} \arrow[l, bend right, "3"'] \end{tikzcd}$$

Zera w lewo

Zamiana jednostek masy

Zera w prawo

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] 1\ \text{mg} \arrow[r, bend right, "3"'] & 1\ \text{g} \arrow[l, bend right, "3"'] \arrow[r, bend right, "1"'] & 1\ \text{dag} \arrow[l, bend right, "1"'] \arrow[r, bend right, "2"'] & 1\ \text{kg} \arrow[l, bend right, "2"'] \arrow[r, bend right, "3"'] & 1\ \text{t} \arrow[l, bend right, "3"'] \end{tikzcd}$$

Zera w lewo

Zamiana jednostek pola

Zera w prawo

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] 1\ \text{mm}^2 \arrow[r, bend right, "2"'] & 1\ \text{cm}^2 \arrow[l, bend right, "2"'] \arrow[r, bend right, "2"'] & 1\ \text{dm}^2 \arrow[l, bend right, "2"'] \arrow[r, bend right, "2"'] & 1\ \text{m}^2 \arrow[l, bend right, "2"'] \arrow[r, bend right, "6"'] & 1\ \text{km}^2 \arrow[l, bend right, "6"'] \end{tikzcd}$$

Zera w lewo

$1\ ha = 100\ a$

$1\ a = 100\ m^2$

Zamiana jednostek objętości

Zera w prawo

$$\begin{tikzcd}
1\ mm^3 \arrow[r, bend right, "3"'] & 1\ cm^3 \arrow[l, bend right, "3"'] \arrow[r, bend right, "3"'] & 1\ dm^3 \arrow[l, bend right, "3"'] \arrow[r, bend right, "3"'] & 1\ m^3 \arrow[l, bend right, "3"'] \arrow[r, bend right, "6"'] & 1\ km^3 \arrow[l, bend right, "9"']
\end{tikzcd}$$

Zera w lewo

$$1\ dm^3 = 1\ l$$

$$1\ l = 1000\ ml$$

Zamiana jednostek czasu

1 rok = 365 dni = 52 tygodnie = 12 miesięcy

1 doba = 24 godziny

1 godzina = 60 minut

1 minuta = 60 sekund

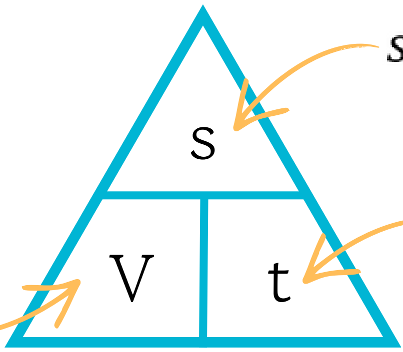
Uwaga na częsty błąd:

1 godzina ≠ 100 minut

1 minuta ≠ 100 sekund

Prędkość, droga, czas

Przekształcenia metodą trójkąta:



$s = V \cdot t$ Wzór na drogę

$t = \frac{s}{V}$ Wzór na czas

Wzór na prędkość $V = \frac{s}{t}$

Zamiana jednostek prędkości:

$$\frac{km}{h} \xleftarrow{\cdot 3{,}6} \frac{m}{s}$$

$$\frac{km}{h} \xrightarrow{:3{,}6} \frac{m}{s}$$

Skala

Zapis $1{:}1000$ oznacza, że:

$$1\ cm\ na\ mapie\ —\ 1000\ cm\ w\ terenie$$

5 cm na mapie w skali 1:20 000, ile to cm w terenie?

Na mapie	W terenie
$1\ cm$	$20\,000\ cm$
$5\ cm$	x

Można to obliczyć z proporcji

Mnożymy po skosie

$$1 \cdot x = 20\,000 \cdot 5\ cm$$

$$x = 100\,000\ cm$$

$$x = 1\,000\ m$$

Wyrażenia algebraiczne

Sposoby zapisywania liczb

cyfra setek

cyfra dziesiątek

cyfra jedności

części tysięczne

12 345, 6789

części dziesięciotysięczne

cyfra dziesiątek tysięcy

cyfra tysięcy

części setne

części dziesiąte

Tę liczbę można zapisać też jako sumę:

$$10\,000 + 2\,000 + 300 + 40 + 5 + 0{,}6 + 0{,}07 + 0{,}008 + 0{,}0009$$

Odwrotność liczby

$$a \to \frac{1}{a}$$

$$5 \to \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{6} \to 6$$

Liczba przeciwna

$$a \to -a$$

$$7 \to -7$$

Liczba większa lub mniejsza od x

$x + 3$ — Liczba o 3 **większa** od x

Liczba o 3 **mniejsza** od x — $x - 3$

Liczba a razy większa lub mniejsza od x

$2x$ — Liczba **dwa razy większa** od x

Liczba **dwa razy mniejsza** od x — $\frac{1}{2}x$

Procenty

Obliczanie jakim procentem liczby a jest liczba b

$$\frac{b}{a} \cdot 100\%$$

$$\frac{10}{20} \cdot 100\% = \frac{100}{20}\% = 50\%$$

Obliczanie procentu danej liczby

$$a \cdot \frac{b\%}{100\%}$$

$$20 \cdot \frac{40\%}{100\%} = 20 \cdot \frac{4}{10} = 20 \cdot \frac{1}{5} = 4$$

Obniżka ceny o x% oznacza, że cena, która obowiązuje po obniżce to **różnica między 100% ceny a procentem, o jaki obniżono cenę**.

$$x - 0{,}4x = 0{,}6x$$

$$100\%x - 40\%x = 60\%x$$

Obniżka ceny o 40% oznacza, że **pozostała cena stanowi 60% ceny początkowej**.

Podwyżka ceny o a% oznacza, że cena, która obowiązuje po podwyżce to suma **100% ceny i procenta, o jaki podniesiono cenę**.

$$x + 0{,}2x = 1{,}2x$$

$$100\%x + 20\%x = 120\%x$$

Podwyżka ceny o 20% oznacza, że **nowa cena stanowi 120% ceny początkowej**.

Zamiana ułamka na procent

$$\frac{1}{5} = 20\% \qquad \frac{1}{10} = 10\%$$

$$\frac{2}{5} = 40\% \qquad \frac{1}{4} = 25\%$$

$$\frac{3}{5} = 60\% \qquad \frac{1}{2} = 50\%$$

$$\frac{4}{5} = 80\% \qquad \frac{3}{4} = 75\%$$

Równania

Mnożenie wyrażeń w nawiasach:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

$$(a + b) \cdot (c - d) = ac - ad + bc - cd$$

Uwaga na zmianę znaku!

Minus przed nawiasem zmienia znaki na przeciwne

$$-(a + b - c) = -a - b + c$$

Równanie oznaczone

Ma jedno rozwiązanie

$$4x + 15 = 25$$
$$4x = 25 - 15$$
$$4x = 10$$
$$x = 2{,}5$$

Jedno rozwiązanie

Równanie tożsamościowe

Ma nieskończenie wiele rozwiązań

$$3x + 9 = 2x + 8 + x + 1$$
$$3x + 9 = 3x + 9$$
$$3x - 3x = 9 - 9$$
$$0 = 0$$

Prawa strona jest równa lewej stronie

Równanie sprzeczne

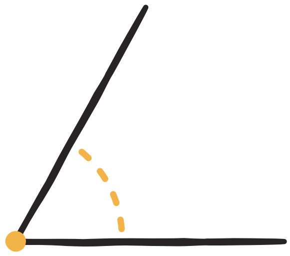
Nie ma rozwiązań

$$4x - 2x + 5 = 7 + 2x$$
$$2x + 5 = 7 + 2x$$
$$2x - 2x = 7 - 5$$
$$0 = 2$$

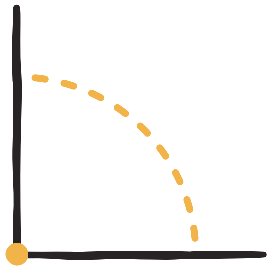
Sprzeczność, 0 nie jest równe 2

Geometria płaska

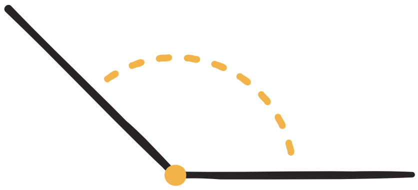
Kąty



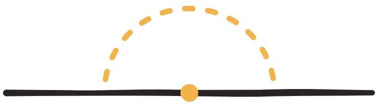
Kąt ostry
Ma mniej niż 90°



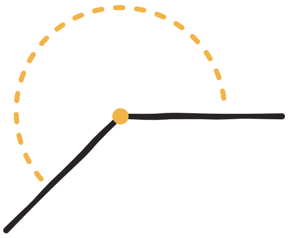
Kąt prosty
Ma dokładnie 90°



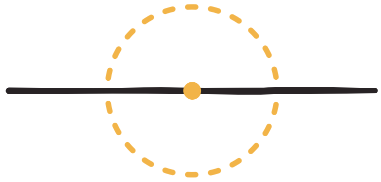
Kąt rozwarty
Ma pomiędzy 90° a 180°



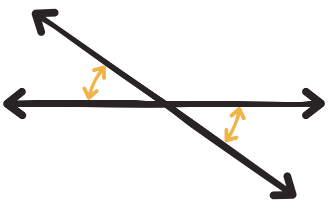
Kąt półpełny
Ma dokładnie 180°



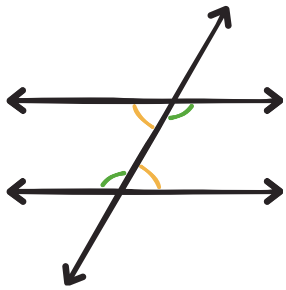
Kąt wklęsły
Ma pomiędzy 180° a 360°



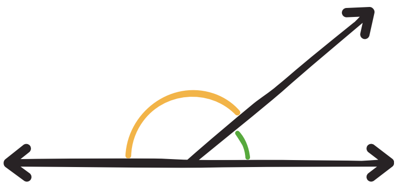
Kąt pełny
Ma dokładnie 360°



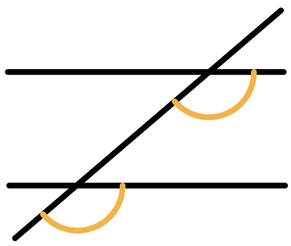
Kąty wierzchołkowe



Kąty naprzemianległe

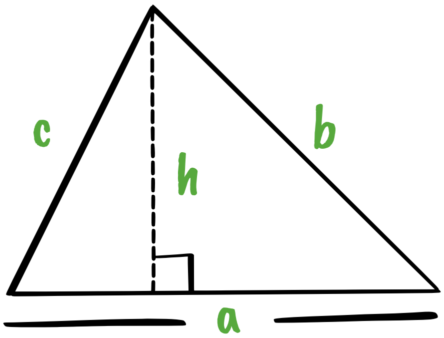


Kąty przyległe
Suma wynosi 180°



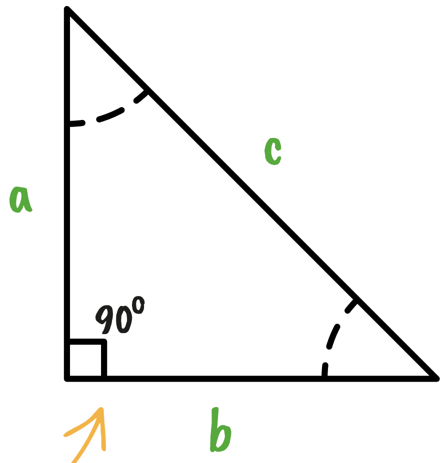
Kąty odpowiadające

Trójkąty



$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$Obw = a + b + c$$



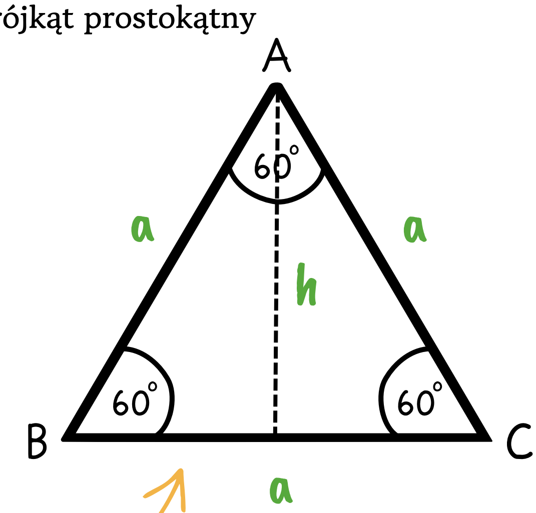
Trójkąt prostokątny

W trójkącie prostokątnym pole można obliczyć też w taki sposób

$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Twierdzenie Pitagorasa

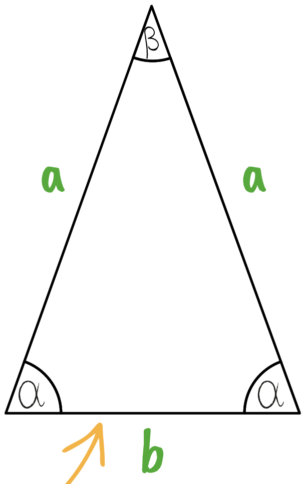


Trójkąt równoboczny
Wszystkie boki tej samej długości
Wszystkie kąty takie same

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suma kątów w trójkącie wynosi 180°

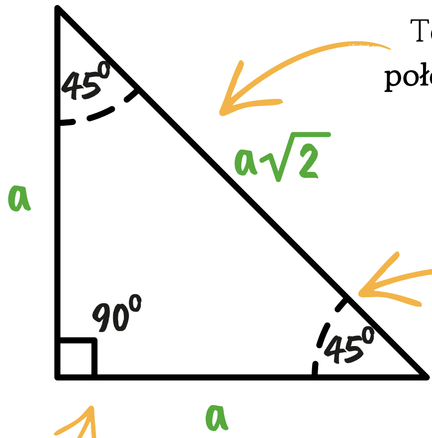


Przydatna suma

$$2\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$Obw = 2a + b$$

Trójkąt równoramienny
Kąty przy podstawie mają taką samą miarę

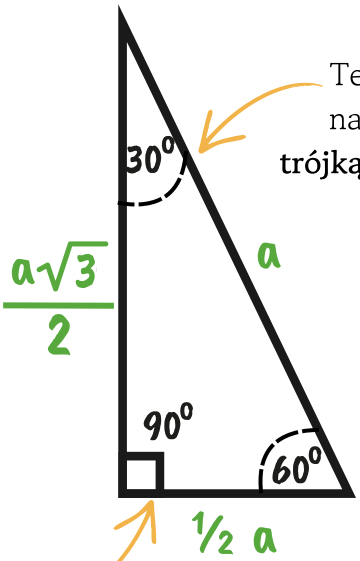


Ten trójkąt jest **połówką kwadratu**

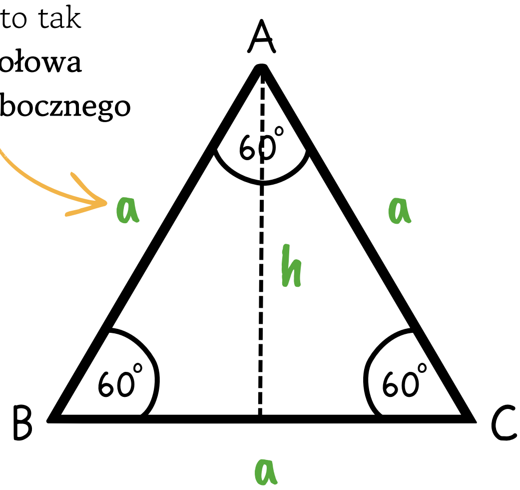
Najdłuższy bok to **przekątna kwadratu**

Jesli pamiętasz zależności w tym trójkącie, znasz jednocześnie wzór na przekątną kwadratu

Trójkąt 45, 45, 90

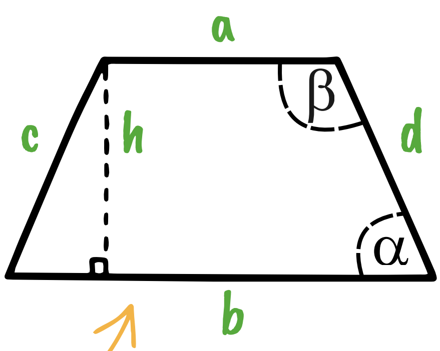


Ten trójkąt to tak naprawdę **połowa trójkąta równobocznego**



Trójkąt 30, 60, 90

Czworokąty



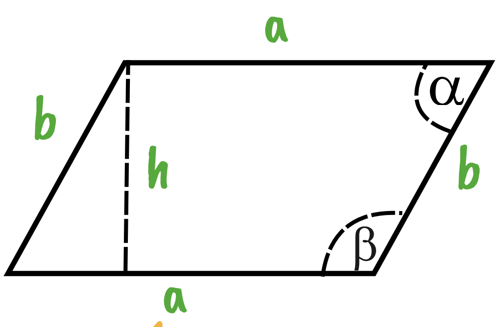
Trapez

$$P = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

$$Obw = a + b + c + d$$

$$\alpha + \beta = 180°$$

Suma kątów przy jednym ramieniu trapezu wynosi 180°



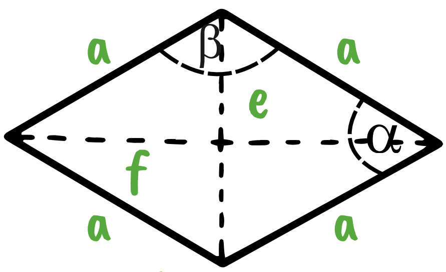
Równoległobok

$$P = a \cdot h$$

$$Obw = 2a + 2b$$

$$\alpha + \beta = 180°$$

Suma kątów przy jednym ramieniu równoległoboku wynosi 180°



Romb

$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

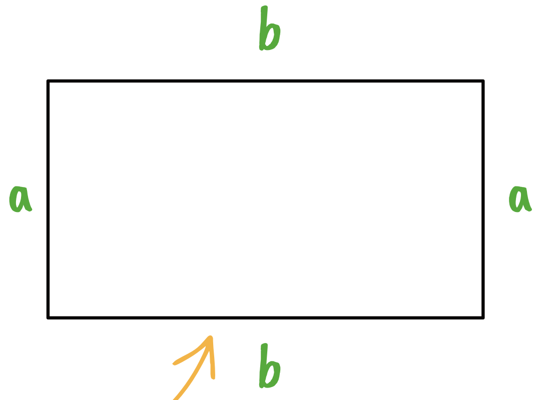
$$Obw = 4a$$

$$\alpha + \beta = 180°$$

Przekątne w rombie połowią się - przecinają się w połowie

Suma kątów przy jednym ramieniu rombu wynosi 180°

Geometria płaska



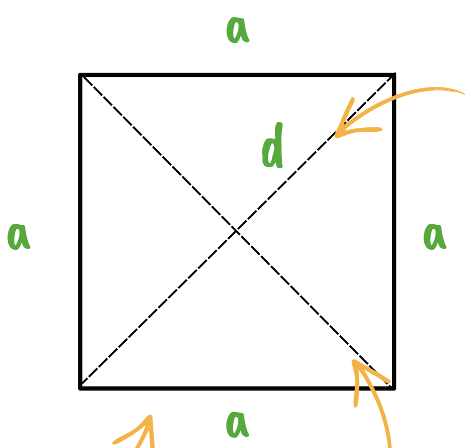
Prostokąt

$$P = a \cdot b$$

$$Obw = 2a + 2b$$

Wszystkie kąty w prostokącie to kąty proste

Przekątne prostokąta połowią się - przecinają się w połowie



Przekątna

Kwadrat

Połowa kwadratu to trójkąt 45, 45, 90

$$P = a \cdot a = a^2$$

$$Obw = 4a$$

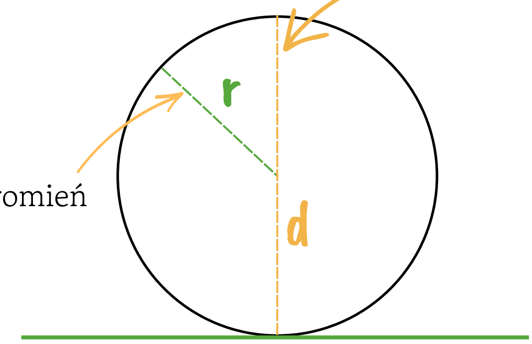
$$d = a\sqrt{2}$$

Wszystkie kąty w kwadracie to kąty proste

Okrąg i koło

Okrąg

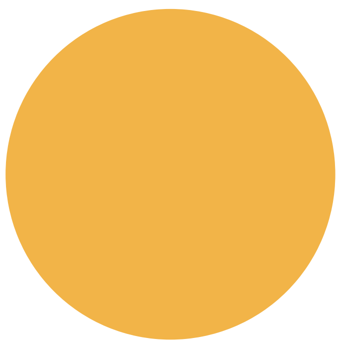
średnica

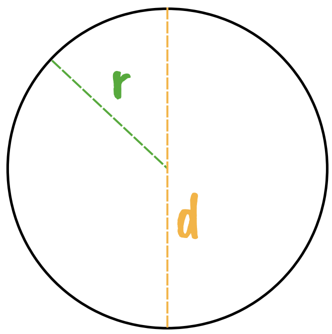


promień

styczna

Koło





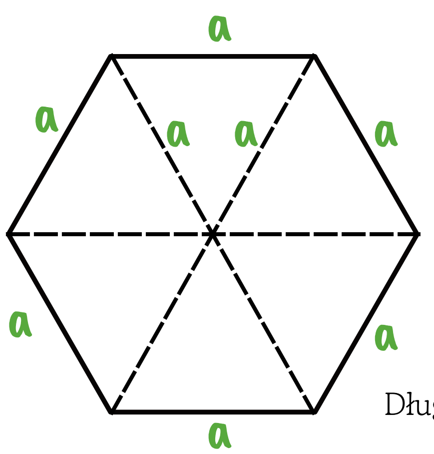
$$Obw = 2\pi r = \pi d$$

$$P = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$r = \frac{1}{2}d$$

Sześciokąt foremny

Sześciokąt foremny jest zbudowany z sześciu przystających trójkątów równobocznych.



$$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Suma pól sześciu trójkątów równobocznych

$$Obw = 6a$$

Długa przekątna

$$D = 2a$$

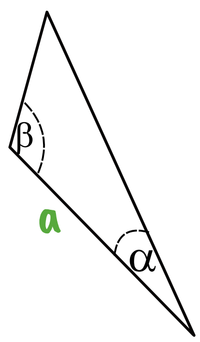
$$d = a\sqrt{3}$$

Krótka przekątna

Cechy przystawania trójkątów

KBK

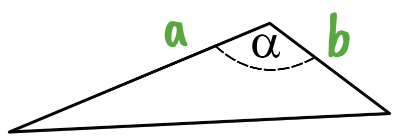
kąt, bok, kąt



dwa trójkąty mają taki sam bok pomiędzy dwoma takimi samymi kątami

BKB

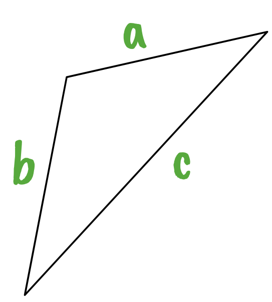
bok, kąt, bok



dwa trójkąty mają taki sam kąt pomiędzy dwoma takimi samymi bokami

BBB

bok, bok, bok

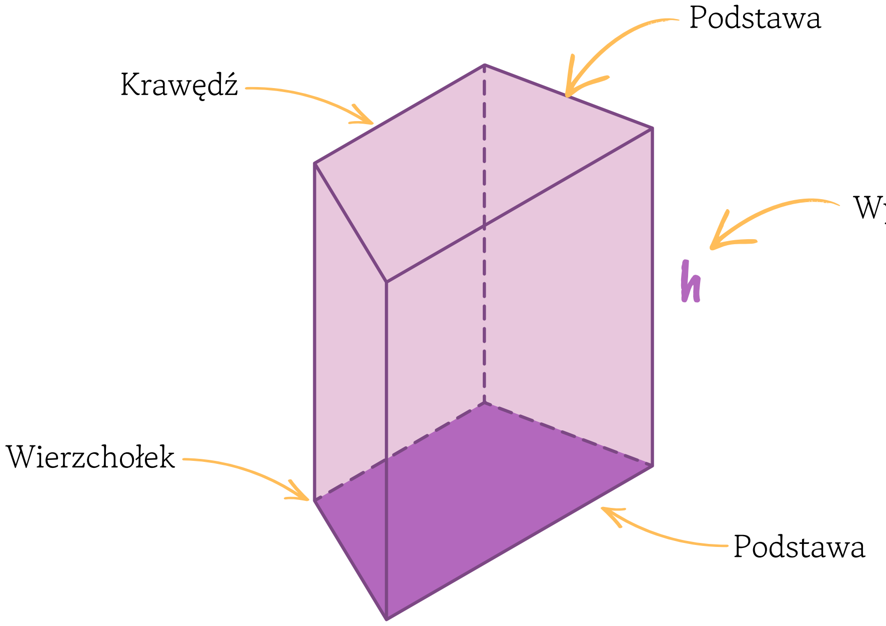


dwa trójkąty mają takie same długości boków

Geometria przestrzenna

Graniastosłupy

Graniastosłupy to wielościany, które mają **dwie podstawy, tzn. ściany, które są położone równolegle względem siebie** i pozostałe ściany będące równoległobokami.



To jest graniastosłup prosty - ściany są **prostopadłe do podstawy.**

Objętość **dowolnego graniastosłupa** można obliczyć ze wzoru:

Wysokość

Objętość $V = P_p \cdot h$

Pole podstawy

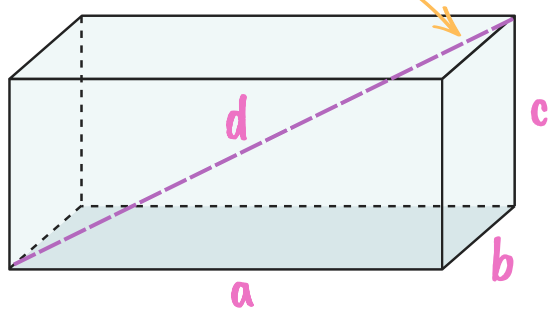
Pole całkowite **dowolnego graniastosłupa** można obliczyć ze wzoru:

Pole całkowite $P_c = 2P_p + P_b$ Pole boczne - suma pól wszystkich ścian bocznych

Pole podstawy

Prostopadłościan

Każda ściana prostopadłościanu jest **prostokątem.**



$$V = abc$$

$$P_c = 2ab + 2bc + 2ac$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

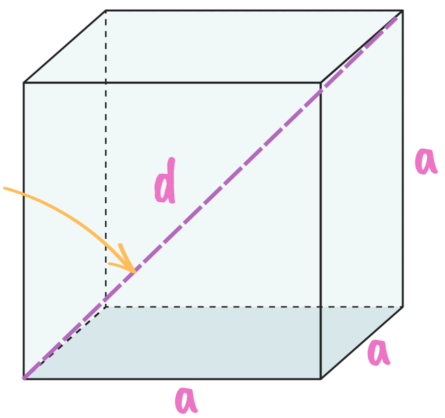
Ten wzór jest bardzo podobny do Twierdzenia Pitagorasa

Objętość prostopadłościanu można też obliczać ze wzoru:

$$V = P_p \cdot h$$

Sześcian

Wszystkie krawędzie sześcianu mają **taką samą długość.** Każda ściana sześcianu to kwadrat o boku a.



$$V = a^3$$

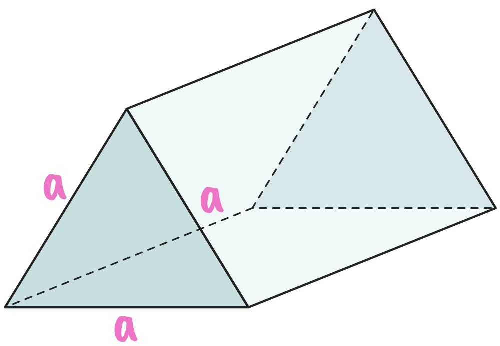
$$P_c = 6a^2$$

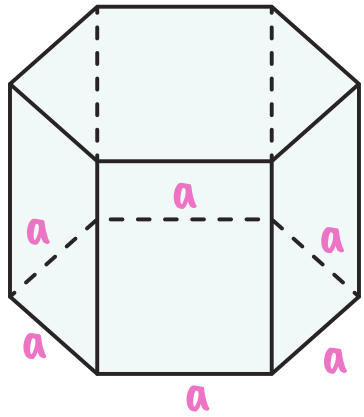
$$d = a\sqrt{3}$$

Graniastosłupy prawidłowe

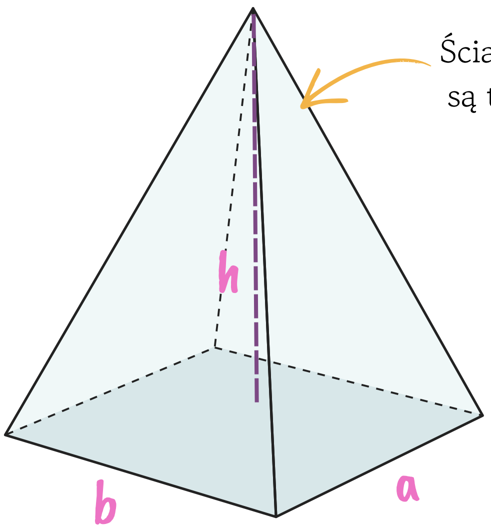
Graniastosłup prawidłowy to taki graniastosłup, który ma w podstawie **figurę foremną** - figurę, której **wszystkie boki mają taką samą długość i wszystkie kąty taką samą miarę.**

- Graniastosłup prawidłowy **trójkątny** - ma w podstawie **trójkąt równoboczny.**
- Graniastosłup prawidłowy **czworokątny** - ma w podstawie **kwadrat**.
- Graniastosłup prawidłowy **sześciokątny** - ma w podstawie **sześciokąt foremny.**





Ostrosłupy



Ściany boczne
są trójkątami

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$$

$$P_c = P_p + P_b$$

Pole boczne -
suma pól
wszystkich
ścian bocznych

Ostrosłupy **również mogą być prawidłowe** - mają wówczas w podstawie figurę foremną, tak samo jak graniastosłupy.

- Ostrosłup prawidłowy **trójkątny** - ma w podstawie **trójkąt równoboczny.**
- Ostrosłup prawidłowy **czworokątny** - ma w podstawie **kwadrat**.
- Ostrosłup prawidłowy **sześciokątny** - ma w podstawie **sześciokąt foremny.**

Prawdopodobieństwo i statystyka

Prawdopodobieństwo

Prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia to stosunek zdarzeń sprzyjających zajściu tego zdarzenia do wszystkich zdarzeń, które mają lub mogą mieć miejscie.

Zdarzenia sprzyjające

$$P = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Wszystkie zdarzenia

Przykład

W pudełku znajduje się 10 kul: 4 czerwone, 1 biała i 5 niebieskich. Określ prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej.

Zdarzenia sprzyjające - liczba kul czerwonych

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Wszystkie zdarzenia - liczba wszystikich kul w pudełku

Obliczanie średniej arytmetycznej

Średnia arytmetyczna to suma wszystkich wartości podzielona przez liczbę tych wartości.

Przykład

Wyznacz średnią arytmetyczną ocen Ani z matematyki, jeśli jej oceny to kolejno: 5, 4, 5, 3, 4, 5.

Suma wszystkich ocen

$$S = \frac{5+4+5+3+4+5}{6} = 4\frac{1}{3}$$

Liczba ocen